

LA HOUILLE BLANCHE

J. REY, Éditeur, GRENOBLE

Abonnement pour une Année $\left\{ \begin{array}{l} \text{France... 30 francs} \\ \text{Étranger... 40 francs} \end{array} \right\}$ Le Numéro : 5 francs

Compte Chèques Postaux LYON 5-84

SOMMAIRE

HYDRAULIQUE. — La Solution générale du Problème de la Détermination des Dimensions économiques Maximum d'une Conduite forcée en Métal et son Application aux Calculs pratiques, par Paul SANTO-RINI, Ingénieur E. P. Z., Athènes. — L'Exposition Internationale de la Houille Blanche et du Tourisme, par V. SYLVESTRE, Ingénieur A. M. et I. E. G.

LÉGISLATION. — Les obligations du concessionnaire strictement limitées à son cahier des charges (arrêt du Conseil d'Etat, du 3 avril 1925), par Paul BOUGAULT, Avocat à la Cour d'appel de Lyon.

DOCUMENTATION. — INFORMATIONS. — BIBLIOGRAPHIE.

HYDRAULIQUE

La Solution générale du Problème de la Détermination des Dimensions Economiques Maximum d'une Conduite forcée en Métal et son Application aux Calculs pratiques.

Par PAUL P.-SANTO RINI, Ingénieur E. P. Z., Directeur de la « Société Anonyme d'Etudes et d'Entreprises », Athènes.

(SUITE)

II. — CONDUITE RECTILIGNE DÉPOURVUE DE SECTION AMONT.

§ 1. — Fonction fondamentale.

Pour l'utilisation pratique des formules précédentes, nous commencerons par considérer une conduite à axe rectiligne privée de section amont, ce qui revient à dire que sur toute la longueur de la conduite, l'épaisseur de paroi est définie par l'expression

$$e = w D h$$

et nous étudierons la transformation de la formule fondamentale (7) :

$$\frac{2}{5} y_{r+1}^{\frac{5}{7}} + y_{r+1}^{-\frac{2}{7}} h_r = \frac{2}{5} y_r^{\frac{5}{7}} + y_r^{-\frac{2}{7}} h_r$$

Etant, (Fig. 5) :

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{r+1} = \frac{h_{r+1} + h_r}{2} \\ y_r = \frac{h_r + h_{r-1}}{2} \end{array} \right.$$

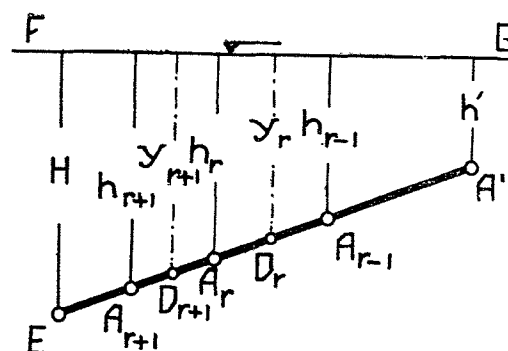


Fig. 5

l'on obtient, en substituant ces valeurs :

$$\frac{2}{5} \left(\frac{h_{r+1} + h_r}{2} \right)^{\frac{5}{7}} + \left(\frac{h_{r+1} + h_r}{2} \right)^{-\frac{2}{7}} h_r = \frac{2}{5} \left(\frac{h_r + h_{r-1}}{2} \right)^{\frac{5}{7}} + \left(\frac{h_r + h_{r-1}}{2} \right)^{-\frac{2}{7}} h_r$$

Errata dans le N° Janvier-Février. Page 7, colonne gauche, 4^{me} ligne, lire : centre de gravité de l'arc au lieu de centre de gravité du segment d'arc.

donc :

$$(h_{r+1} + h_r)^{\frac{5}{7}} + 5 (h_{r+1} + h_r)^{-\frac{2}{7}} h_r = (h_r + h_{r-1})^{-\frac{5}{7}} + 5 (h_r + h_{r-1})^{-\frac{2}{7}} h_r$$

et, en divisant par $h_r^{\frac{5}{7}}$:

$$\left(\frac{h_{r+1}}{h_r} + 1\right)^{\frac{5}{7}} + 5 \left(\frac{h_{r+1}}{h_r} + 1\right)^{-\frac{2}{7}} = \left(1 + \frac{h_{r-1}}{h_r}\right)^{\frac{5}{7}} + 5 \left(1 + \frac{h_{r-1}}{h_r}\right)^{-\frac{2}{7}} \quad (10)$$

qui est la formule fondamentale pour les conduites à axe rectiligne.

En ce qui concerne le diamètre D du r^{me} tronçon, sa valeur se traduit par l'équation (5) :

$$D_r = \sqrt[7]{\frac{T}{y_r}} = \sqrt[7]{\frac{2 T}{h_r + h_{r-1}}} \quad (11)$$

Pour démontrer que la formule fondamentale (10) résout le problème étudié, nous donnons à r les valeurs successives 1, 2 $(n-1)$.

Nous obtenons ainsi le système d'équations :

$$\begin{aligned} \left(\frac{h_2}{h_1} + 1\right)^{\frac{5}{7}} + 5 \left(\frac{h_2}{h_1} + 1\right)^{-\frac{2}{7}} &= \left(1 + \frac{h'_1}{h_1}\right)^{\frac{5}{7}} + 5 \left(1 + \frac{h'_1}{h_1}\right)^{-\frac{2}{7}} \\ \left(\frac{h_3}{h_2} + 1\right)^{\frac{5}{7}} + 5 \left(\frac{h_3}{h_2} + 1\right)^{-\frac{2}{7}} &= \left(1 + \frac{h_1}{h_2}\right)^{\frac{5}{7}} + 5 \left(1 + \frac{h_1}{h_2}\right)^{-\frac{2}{7}} \\ \left(\frac{h_4}{h_3} + 1\right)^{\frac{5}{7}} + 5 \left(\frac{h_4}{h_3} + 1\right)^{-\frac{2}{7}} &= \left(1 + \frac{h_2}{h_3}\right)^{\frac{5}{7}} + 5 \left(1 + \frac{h_2}{h_3}\right)^{-\frac{2}{7}} \\ &\vdots \\ \left(\frac{h_{r+1}}{h_r} + 1\right)^{\frac{5}{7}} + 5 \left(\frac{h_{r+1}}{h_r} + 1\right)^{-\frac{2}{7}} &= \left(1 + \frac{h_{r-1}}{h_r}\right)^{\frac{5}{7}} + 5 \left(1 + \frac{h_{r-1}}{h_r}\right)^{-\frac{2}{7}} \\ &\vdots \\ \left(\frac{h_{n-1}}{h_{n-2}} + 1\right)^{\frac{5}{7}} + 5 \left(\frac{h_{n-1}}{h_{n-2}} + 1\right)^{-\frac{2}{7}} &= \left(1 + \frac{h_{n-3}}{h_{n-2}}\right)^{\frac{5}{7}} + 5 \left(1 + \frac{h_{n-3}}{h_{n-2}}\right)^{-\frac{2}{7}} \\ \left(\frac{H}{h_{n-1}} + 1\right)^{\frac{5}{7}} + 5 \left(\frac{H}{h_{n-1}} + 1\right)^{-\frac{2}{7}} &= \left(1 + \frac{h_{n-2}}{h_{n-1}}\right)^{\frac{5}{7}} + 5 \left(1 + \frac{h_{n-2}}{h_{n-1}}\right)^{-\frac{2}{7}} \end{aligned} \quad (12)$$

Le nombre de ces équations est $(n-1)$, c'est-à-dire le même que celui des inconnues h_1, h_2, \dots, h_{n-1} .

La première de ces équations ne contient que les deux inconnues h_1 et h_2 , la dernière les deux inconnues h_{n-1} et h_{n-2} , alors que toutes les équations intermédiaires contiennent trois inconnues successives :

$$h_{r-1}, h_r \text{ et } h_{r+1}$$

Pour la résolution du système d'équations (12) l'on ne peut procéder que par tentatives successives : une fois fixée une valeur arbitraire pour h_1 , la première équation fournira la valeur de h_2 . Les valeurs de h_1 et de h_2 substituées dans la deuxième équation, celle-ci fournit une valeur pour h_3 , et ainsi de suite, l'avant-dernière équation fournira une valeur pour h_{n-1} . En substituant les valeurs obtenues pour h_{n-2} et h_{n-1} dans la dernière équation, si la valeur de H s'obtient égale à celle effective et connue, il s'ensuit que la valeur de h_1 a été bien choisie. Si non, l'opération est à refaire avec une nouvelle valeur pour h_1 .

En général, trois ou quatre tentatives suffisent. Et si l'on considère les valeurs h'_1, h''_1, h'''_1 assumées pour h_1 dans les tentatives successives comme abscisses, et les valeurs correspondantes H', H'', H''' résultant de la dernière équation (12) comme

ordonnées, l'on pourra tracer une courbe dont le point d'ordonnée H aura pour abscisse la valeur à assumer pour h_1 (Fig. 6).

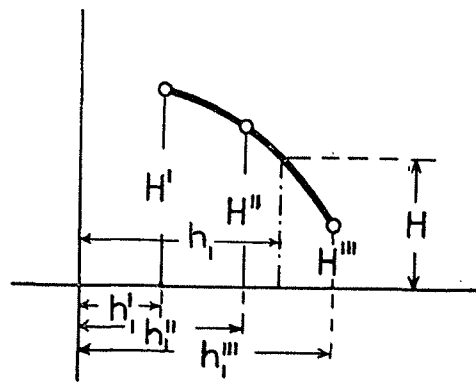


Fig. 6.

§ 2.— Résolution géométrique du système d'équations fondamental.

Nous venons de dire au § 1 que pour la résolution du système (12), une fois fixée une valeur arbitraire pour h_1 , les équations successives fournissent les valeurs successives $h_2, h_3, \dots, h_{n-1}, H'$.

Nous voulons maintenant montrer comment ces valeurs successives peuvent être obtenues géométriquement d'une manière très rapide.

En effet, en posant

$$1 + \frac{h_{r+1}}{h_r} = v_r,$$

l'équation générale (10) se transforme en :

$$v_r^{\frac{5}{7}} + 5 v_r^{-\frac{2}{7}} = \left(\frac{v_{r-1}}{v_{r-1} - 1}\right)^{\frac{5}{7}} + 5 \left(\frac{v_{r-1}}{v_{r-1} - 1}\right)^{-\frac{2}{7}}$$

Si l'on pose, d'autre part :

$$\left(\frac{v_{r-1}}{v_{r-1} - 1}\right)^{\frac{5}{7}} + 5 \left(\frac{v_{r-1}}{v_{r-1} - 1}\right)^{-\frac{2}{7}} = z_r,$$

il s'ensuit :

$$v_r^{\frac{5}{7}} + 5 v_r^{-\frac{2}{7}} = z_r$$

Considérons maintenant (Fig. 7) la courbe d'équation :

$$v^{\frac{5}{7}} + 5 v^{-\frac{2}{7}} = z$$

Pour des valeurs positives de v (en particulier $v_r = 1 + \frac{h_{r+1}}{h_r}$ ne peut avoir que des valeurs plus grandes que 2, étant toujours $h_{r+1} > h_r$), les valeurs de z résultent, elles aussi, positives.

La courbe

$$v^{\frac{5}{7}} + 5 v^{-\frac{2}{7}} = z$$

présente un seul minimum dans le point défini par

$$\frac{dz}{dv} = \frac{5}{7} v^{-\frac{2}{7}} - 5 \cdot \frac{2}{7} \cdot v^{-\frac{9}{7}} = 0$$

qui fournit $v = 2$ à laquelle valeur correspond le minimum de z :

$$z_{\min} = 2^{\frac{5}{7}} + 5 \cdot 2^{-\frac{2}{7}} = 5,7423$$

La courbe a pour asymptote l'axe des z , tandis que pour $v = \infty$ il résulte $z = \infty$. Donc, pendant que v croît de la valeur zéro à la valeur 2, z décroît de la valeur ∞ à la valeur 5,7423 et pendant que v croît encore de 2 à ∞ , z aussi croît de 5,7423 à ∞ .

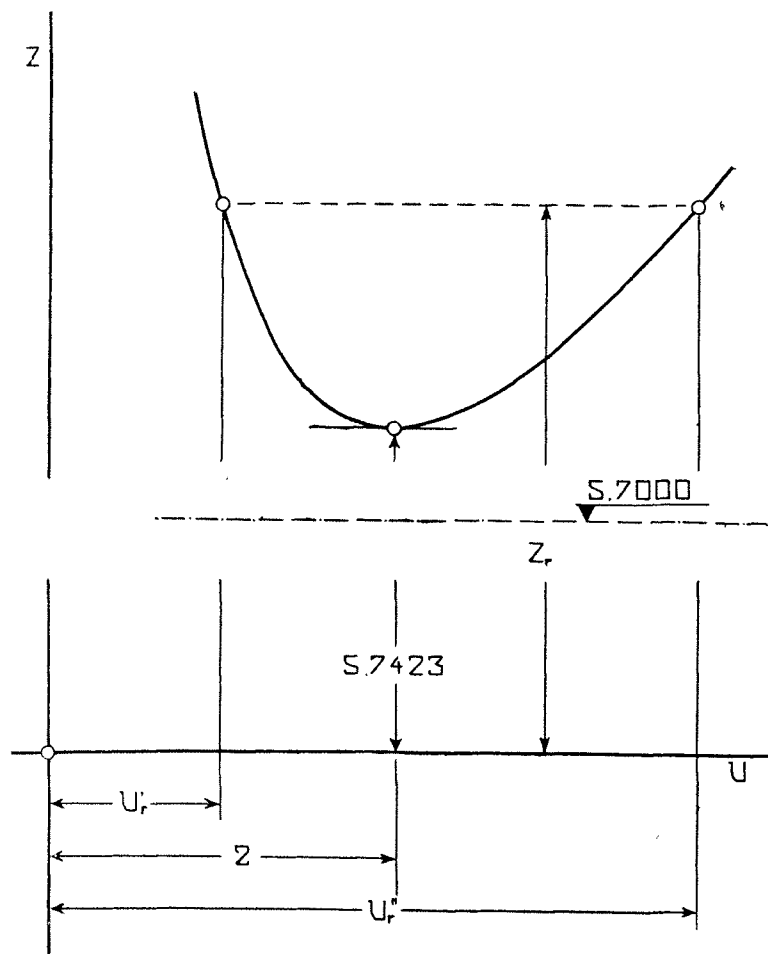


Fig. 7.

Tout ce qui précède montre que pour une valeur donnée de z_r il existe pour v_r deux valeurs

$$v_r' < 2 \text{ et } v_r'' > 2,$$

dont la plus grande seulement est à utiliser. En effet, nous avons déjà dit que v_r ne peut assumer que des valeurs plus grandes que 2.

Fixons maintenant une première valeur arbitraire pour h_1 et portons dans la fig. 8 :

$$\overline{PU} = \frac{h'}{h_1}$$

Il sera alors :

$$\overline{OU} = 1 + \frac{h'}{h_1}$$

donc :

$$\overline{U\pi} = \left(1 + \frac{h'}{h_1}\right)^{\frac{5}{7}} + 5 \left(1 + \frac{h'}{h_1}\right)^{-\frac{2}{7}} = z_1$$

En projetant parallèlement à l'axe des v le point π en α sur la courbe, il résultera alors :

$$\overline{OA}^{\frac{5}{7}} + 5 \overline{OA}^{-\frac{2}{7}} = z_1 = \left(1 + \frac{h'}{h_1}\right)^{\frac{5}{7}} + 5 \left(1 + \frac{h'}{h_1}\right)^{-\frac{2}{7}}$$

Cette expression confrontée avec la première équation du système (12) :

$$\left(\frac{h_2}{h_1} + 1\right)^{\frac{5}{7}} + 5 \left(\frac{h_3}{h_1} + 1\right)^{-\frac{2}{7}} = \left(1 + \frac{h'}{h_1}\right)^{\frac{5}{7}} + 5 \left(1 + \frac{h'}{h_1}\right)^{-\frac{2}{7}}$$

montre que

$$\overline{OA} = \frac{h_2}{h_1} + 1,$$

donc :

$$\overline{OA} = v_1$$

Pour obtenir les valeurs successives des v , nous projetons α en a parallèlement à l'axe des z sur PR inclinée à 45°.

Nous projetons, d'autre part, a en a' du centre O sur ST parallèle à l'axe des v et distante de l'unité de cet axe. En conduisant, enfin, par a' la parallèle à l'axe des z , l'on aura :

$$\overline{OA'} = \overline{OA} \frac{\overline{A'a'}}{\overline{Aa}} = \overline{OA} \frac{\overline{A'a'}}{\overline{PA}} = \frac{v_1}{v_1 - 1}$$

L'ordonnée $A'z'$ correspondant au point A' aura donc la valeur

$$\left(\frac{v_1}{v_1 - 1}\right)^{\frac{5}{7}} + 5 \left(\frac{v_1}{v_1 - 1}\right)^{-\frac{2}{7}} = z_2$$

En conduisant donc la parallèle de z' à l'axe des v , l'on aura dans le point d'intersection avec la courbe le point β dont l'abscisse OB, en vertu de la 2^e équation du système (12), représente justement la valeur de v_2 .

D'une manière analogue nous pouvons déterminer v_3, v_4, \dots dont les valeurs successives tendent vers la limite 2.

Des considérations relevant du domaine de la géométrie projective nous permettent d'indiquer ici une deuxième construction géométrique résolvant le même problème (Fig. 9).

Une fois la courbe $v^{\frac{5}{7}} + 5 v^{-\frac{2}{7}} = z$ tracée, l'on connaît le point π d'abscisse $1 + \frac{h'}{h_1}$. Nous projetons donc π en α et α en A.

Nous traçons ensuite la demi-circonférence de diamètre PA. Le point a obtenu par l'intersection avec la demi-circonférence de diamètre OQ est maintenant projeté en α' .

En projetant α' en β et β en B, l'on peut continuer la construction en obtenant ainsi les points A, B, C, etc., dont les distances de l'origine O représentent les valeurs v_1, v_2, v_3, \dots etc.

§ 3. — Cas particulier : $h' = 0$.

Un cas particulier très intéressant du problème général considéré au § 1 s'obtient lorsqu'on pose $h' = 0$, ce qui correspond à une conduite dont l'origine coïncide avec le niveau hydrostatique.

En adoptant l'hypothèse $h' = 0$, le deuxième membre de la première équation du système (12) résulte égal à 6, le système résolvant le problème devient donc :

$$\begin{aligned} \left(\frac{h_2}{h_1} + 1\right)^{\frac{5}{7}} + 5 \left(\frac{h_2}{h_1} + 1\right)^{-\frac{2}{7}} &= 6 \\ \left(\frac{h_3}{h_2} + 1\right)^{\frac{5}{7}} + 5 \left(\frac{h_3}{h_2} + 1\right)^{-\frac{2}{7}} &= \left(1 + \frac{h_1}{h_2}\right)^{\frac{5}{7}} + 5 \left(1 + \frac{h_1}{h_2}\right)^{-\frac{2}{7}} \\ \left(\frac{h_4}{h_3} + 1\right)^{\frac{5}{7}} + 5 \left(\frac{h_4}{h_3} + 1\right)^{-\frac{2}{7}} &= \left(1 + \frac{h_2}{h_3}\right)^{\frac{5}{7}} + 5 \left(1 + \frac{h_2}{h_3}\right)^{-\frac{2}{7}} \\ &\vdots \\ \left(\frac{h_{n-1}}{h_{n-2}} + 1\right)^{\frac{5}{7}} + 5 \left(\frac{h_{n-1}}{h_{n-2}} + 1\right)^{-\frac{2}{7}} &= \left(1 + \frac{h_{n-3}}{h_{n-2}}\right)^{\frac{5}{7}} + 5 \left(1 + \frac{h_{n-3}}{h_{n-2}}\right)^{-\frac{2}{7}} \\ \left(\frac{H}{h_{n-1}} + 1\right)^{\frac{5}{7}} + 5 \left(\frac{H}{h_{n-1}} + 1\right)^{-\frac{2}{7}} &= \left(1 + \frac{h_{n-2}}{h_{n-1}}\right)^{\frac{5}{7}} + 5 \left(1 + \frac{h_{n-2}}{h_{n-1}}\right)^{-\frac{2}{7}} \end{aligned} \quad (13)$$

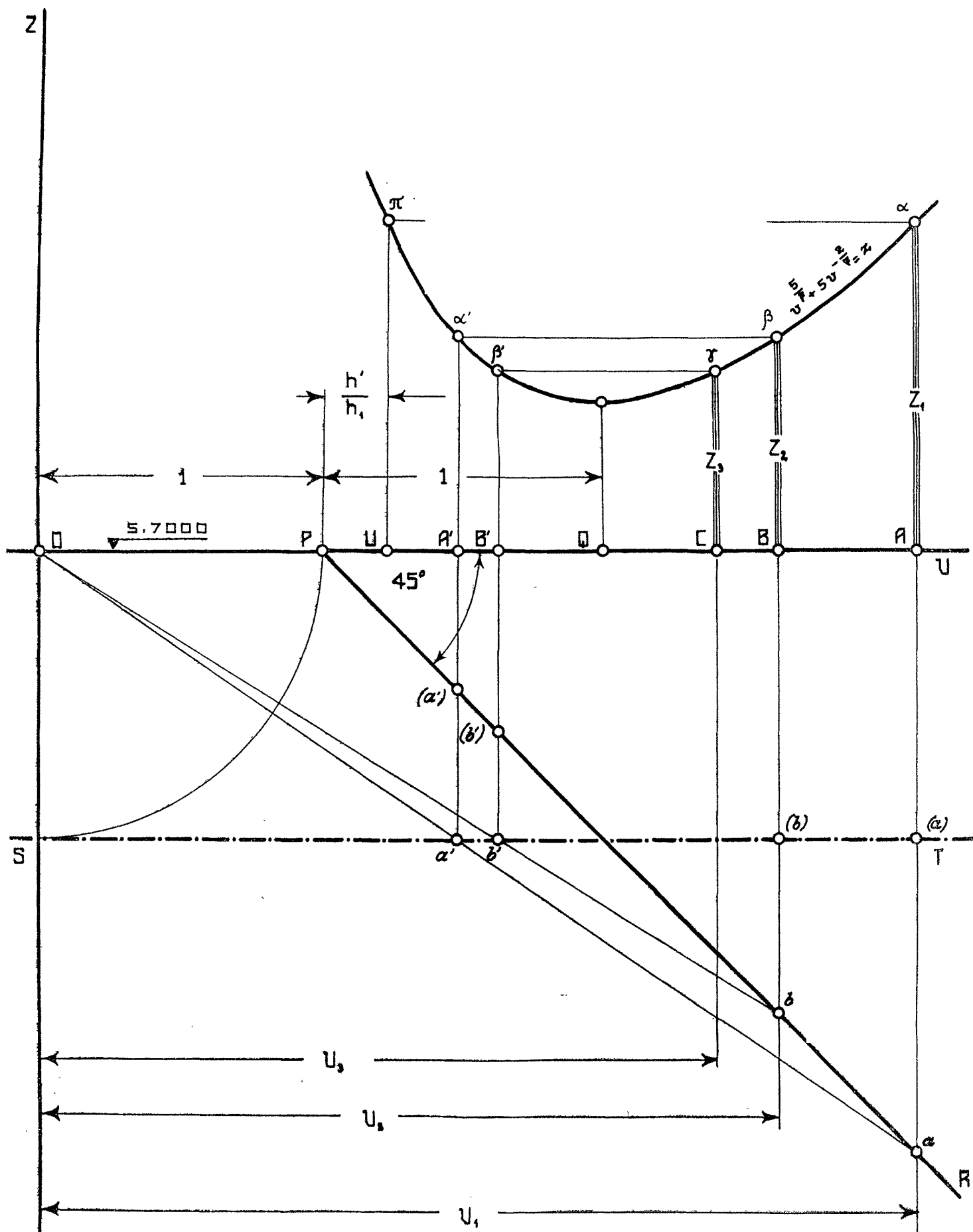


Fig. 8.

En considérant comme inconnues non plus les ∇h , mais les rapports

$$\frac{h_2}{h_1}, \frac{h_3}{h_2}, \frac{h_4}{h_3}, \dots, \frac{H}{h_{n-1}}$$

les premières $(n-2)$ équations du système (13) ont le notable

avantage sur celles du système (12) de contenir chacune une inconnue en moins.

Plus précisément, la première contient une seule inconnue $\frac{h_2}{h_1}$ et toutes les autres deux inconnues successives. La résolution ne présente donc aucune difficulté.

En effet, la première équation fournit la valeur $\frac{h_2}{h_1}$. Une fois $\frac{h_2}{h_1}$ connu, et, conséquemment aussi sa valeur inverse $\frac{h_1}{h_2}$, la deuxième équation fournit le rapport $\frac{h_3}{h_2}$. Ce rapport déterminé et son inverse connu, la troisième équation fournit le rapport $\frac{h_4}{h_3}$, et ainsi de suite.

sont des nombres fixes et invariables, qu'il suffira de calculer une fois pour toutes.

Pour déterminer ces rapports fixes et invariables, nous poserons, comme nous l'avons déjà précédemment fait :

$$1 + \frac{u_i + i}{h_r} = v_r$$

$$\left(\frac{v_{r-1}}{v_{r-1} - 1} \right)^{\frac{5}{7}} + 5 \left(\frac{v_{r-1}}{v_{r-1} - 1} \right)^{-\frac{2}{7}} = z_r$$

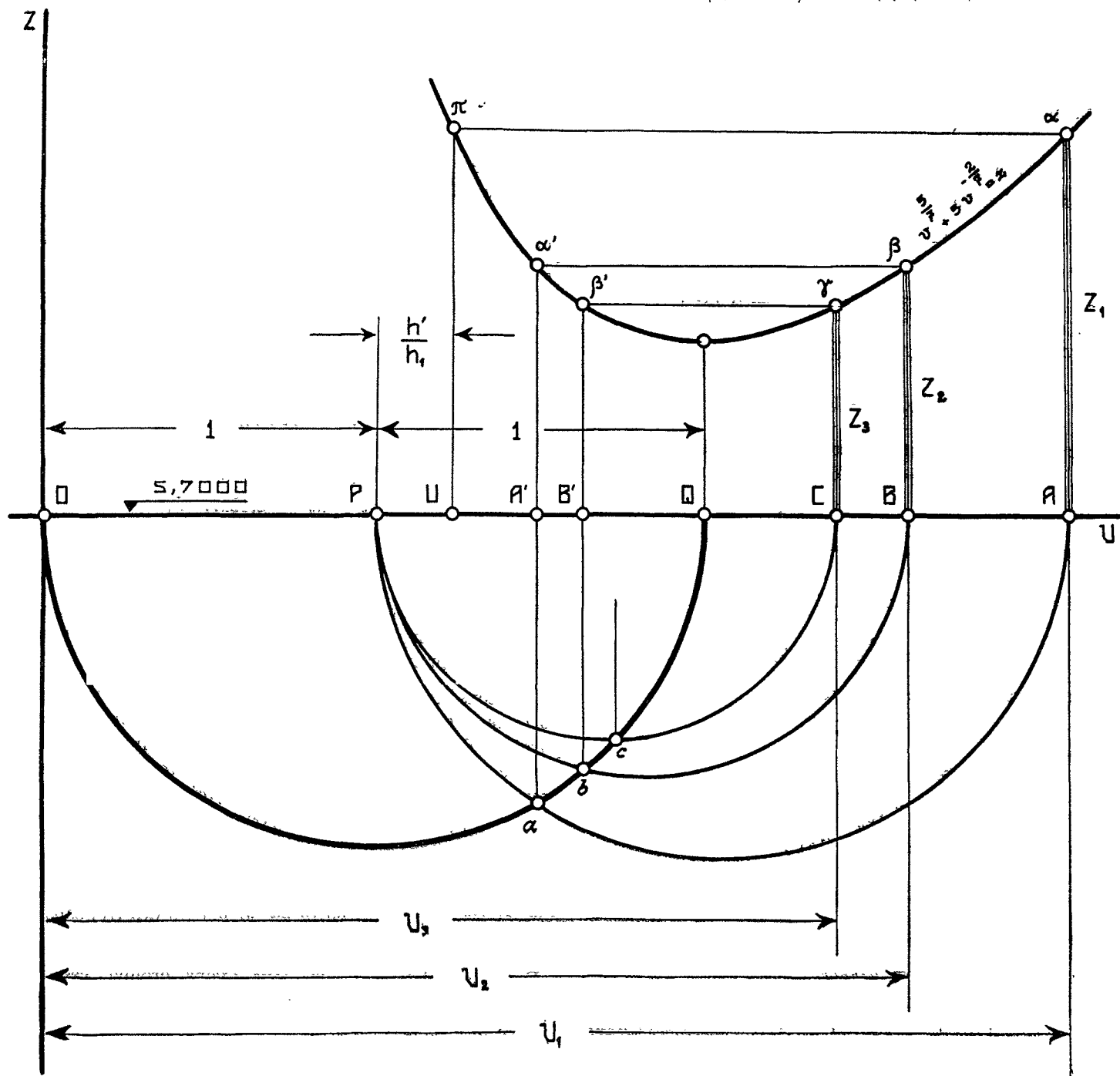


Fig. 9.

Nous attirons l'attention sur la grande importance du système (13). Celui-ci est, en effet, indépendant de T et de l'inclinaison de la conduite. Il nous permet d'énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME III

Pour n'importe quelle conduite d'inclinaison constante, d'origine située sur le niveau hydrostatique et d'épaisseur de paroi proportionnelle à la charge statique et au diamètre en chaque point de la conduite, les rapports des longueurs des tronçons successifs

Le système (13) se transforme alors en :

$$\left. \begin{aligned} v_1^{\frac{5}{7}} + 5 v_1^{-\frac{2}{7}} &= 6 \\ v_2^{\frac{5}{7}} + 5 v_2^{-\frac{2}{7}} &= z_2 \\ v_3^{\frac{5}{7}} + 5 v_3^{-\frac{2}{7}} &= z_3 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

La première équation du système (14) est satisfaite par les deux valeurs

$$v'_1 = 1 \quad \text{et} \quad v''_1 = 3,7591$$

En écartant la valeur de v inférieure à 2, il reste :

$$v_1 = 3,7591$$

d'où :

$$z_2 = \left(\frac{v_1}{v_1 - 1} \right)^{\frac{5}{7}} + 5 \left(\frac{v_1}{v_1 - 1} \right)^{-\frac{2}{7}} = 5,8243$$

La deuxième équation du système (14) est donc :

$$v_2^{\frac{5}{7}} + 5 v_2^{-\frac{2}{7}} = 5,8243$$

qui est satisfaite par les deux valeurs

$$v'_2 = \frac{3,7591}{2,7591} = 1,3624 \quad \text{et} \quad v''_2 = 2,8777$$

En écartant de nouveau la valeur de v inférieure à 2, il reste :

$$v_2 = 2,8777$$

d'où :

$$z_3 = \left(\frac{v_2}{v_2 - 1} \right)^{\frac{5}{7}} + 5 \left(\frac{v_2}{v_2 - 1} \right)^{-\frac{2}{7}} = 5,7824$$

La troisième équation du système (14) est donc :

$$v_3^{\frac{5}{7}} + 5 v_3^{-\frac{2}{7}} = 5,7824$$

La valeur de $v_3 > 2$ qui satisfait cette équation, est :

$$v_3 = 2,5848,$$

donc :

$$z_4 = \left(\frac{v_3}{v_3 - 1} \right)^{\frac{5}{7}} + 5 \left(\frac{v_3}{v_3 - 1} \right)^{-\frac{2}{7}} = 5,7660$$

La quatrième équation du système (14) est donc

$$v_4^{\frac{5}{7}} + 5 v_4^{-\frac{2}{7}} = 5,7660$$

satisfaite par la valeur de v_4 supérieure à 2 :

$$v_4 = 2,4379$$

L'on a, ainsi :

$$z_5 = \left(\frac{v_4}{v_4 - 1} \right)^{\frac{5}{7}} + 5 \left(\frac{v_4}{v_4 - 1} \right)^{-\frac{2}{7}} = 5,7580$$

et la cinquième équation du système (14) :

$$v_5^{\frac{5}{7}} + 5 v_5^{-\frac{2}{7}} = 5,7580$$

est satisfaite par la valeur de v_5 supérieure à 2 :

$$v_5 = 2,3506.$$

De cette manière l'on pourrait continuer la détermination des valeurs successives de v , ces valeurs tendant, comme nous l'avons déjà remarqué plus haut, vers la limite 2.

Les valeurs numériques obtenues avec toute précision voulue pour v , v_2 , v_3 ,... peuvent également être obtenues, mais avec une précision moins grande, par le moyen des deux constructions géométriques basées sur la courbe

$$v^{\frac{5}{7}} + 5 v^{-\frac{2}{7}} = z$$

et exposées au § 2.

Etant, par hypothèse, $h' = 0$, le segment PU résultera nul et les constructions des figures 8 et 9 pourront être répétées intégralement en faisant coïncider le point U avec le point P.

Les valeurs obtenues plus haut :

$$\begin{aligned} v_1 &= 3,7591 \\ v_2 &= 2,8777 \\ v_3 &= 2,5848 \\ v_4 &= 2,4379 \\ v_5 &= 2,3506 \end{aligned}$$

permettent d'obtenir les longueurs des tronçons successifs d'une conduite en fonction de la longueur du premier tronçon.

En effet, étant

$$v_r = 1 + \frac{h_{r+1}}{h_r},$$

il sera :

$$\begin{aligned} h_2 &= h_1 (v_1 - 1) \\ h_3 &= h_2 (v_2 - 1) \\ h_r &= h_{r-1} (v_{r-1} - 1) \end{aligned}$$

En égalant le produit des premiers membres au produit des deuxièmes, il résulte :

$$h_r = h_1 (v_1 - 1) (v_2 - 1) \dots (v_{r-1} - 1)$$

d'où :

$$h_r - h_{r-1} = h_1 (v_1 - 1) (v_2 - 1) \dots (v_{r-2} - 1) (v_{r-1} - 2)$$

L'on obtient donc, en substituant aux v les valeurs données :

$$\begin{aligned} h_2 &= 2,7591. \quad h_1 \\ h_3 &= 5,1808. \quad h_1 \\ h_4 &= 8,2105. \quad h_1 \\ h_5 &= 11,8058. \quad h_1 \\ h_6 &= 15,9449. \quad h_1 \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} h_2 - h_1 &= 1,7591. \quad h_1 \\ h_3 - h_2 &= 2,4217. \quad h_1 \\ h_4 - h_3 &= 3,0297. \quad h_1 \\ h_5 - h_4 &= 3,5953. \quad h_1 \\ h_6 - h_5 &= 4,1391. \quad h_1 \end{aligned}$$

Il est clair que ces derniers coefficients représentent aussi les rapports des longueurs des tronçons successifs par rapport à la longueur du premier tronçon.

Par conséquent, pour n'importe quelle conduite rectiligne dont l'origine se trouve sur le niveau hydrostatique, dont l'épaisseur de paroi est définie par $e = w Dh$ et dont le nombre de tronçons n est fixé ou déterminé, il suffit de subdiviser la conduite en tronçons proportionnels aux premiers n des coefficients suivants :

$$1; 1,7591; 2,4217; 3,0297; 3,5953; 4,1391$$

pour obtenir la subdivision en n tronçons.

En divisant les premiers n nombres fixes par leur somme, l'on obtient les rapports ξ entre les longueurs des tronçons et celle de la conduite.

Dans le tableau suivant nous avons groupé ces rapports $\xi_r = \frac{l_r}{L}$ pour $n = 1, 2, \dots, 6$.

TABLEAU I

n	Valeurs des rapports $\xi_r = \frac{l_r}{L}$					
	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4	ξ_5	ξ_6
1	1,00000					
2	0,36244	0,63756				
3	0,19302	0,33954	0,46744			
4	0,12180	0,21425	0,29495	0,36900		
5	0,08470	0,14900	0,20513	0,25663	0,30454	
6	0,06272	0,11032	0,15188	0,19001	0,22548	0,25959

Dans le deuxième tableau, nous fixons les valeurs

$$\gamma_r = \frac{y_r}{H} = \sum_{i=1}^{r-1} \xi_i + \frac{1}{2} \xi_r$$

qui représentent, évidemment, les rapports entre les charges statiques y des centres de gravité des tronçons successifs et la charge statique totale H .

TABLEAU II

n	Valeurs des rapports $\gamma_r = \frac{\sum_{i=1}^{r-1} l_i + \frac{l_r}{2}}{L} = \sum_{i=1}^{r-1} \xi_i + \frac{\xi_r}{2}$					
	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	γ_5	γ_6
1	0,50000					
2	0,18122	0,68122				
3	0,09651	0,36279	0,76628			
4	0,06090	0,22892	0,48352	0,81550		
5	0,04235	0,15920	0,33626	0,56714	0,84773	
6	0,03136	0,11788	0,24898	0,41992	0,62767	0,87021

L'utilisation de ces deux tableaux est la suivante.

Soit une conduite rectiligne de longueur totale L , de charge statique totale H et dont l'origine se trouve sur le niveau hydrostatique. Cette conduite est à subdiviser en $n = 3$ tronçons.

La résolution de ce problème est immédiate. En effet, le tableau I nous fournit les longueurs des tronçons :

$$\begin{aligned} l_1 &= 0,19302 \cdot L \\ l_2 &= 0,33954 \cdot L \\ l_3 &= 0,46744 \cdot L \end{aligned}$$

et le tableau II les diamètres respectifs :

$$\begin{aligned} D_1 &= \sqrt[7]{\frac{T}{0,09651 \cdot H}} \\ D_2 &= \sqrt[7]{\frac{T}{0,36279 \cdot H}} \\ D_3 &= \sqrt[7]{\frac{T}{0,76628 \cdot H}} \end{aligned}$$

Ces deux tableaux permettent aussi de reconnaître la variation de

$$\begin{aligned} K_u &= \frac{7}{5} T^{\frac{2}{7}} \sum_{r=1}^n (x_r - x_{r-1}) y_r = \frac{7}{5} T^{\frac{2}{7}} L H^{\frac{5}{7}} \sum_{r=1}^n \frac{x_r - x_{r-1}}{L} \left(\frac{y_r}{H} \right)^{\frac{5}{7}} = \\ &= \frac{7}{5} T^{\frac{2}{7}} L H^{\frac{5}{7}} \sum_{r=1}^n \xi_r \gamma_r = F \sum_{r=1}^n \xi_r \gamma_r \end{aligned}$$

En effet, les deux premiers tableaux permettent d'obtenir le troisième tableau suivant :

TABLEAU III

n	Valeurs des $\xi_r \gamma_r$						Valeurs des $\sum_{r=1}^n \xi_r \gamma_r$
	$\xi_1 \gamma_1$	$\xi_2 \gamma_2$	$\xi_3 \gamma_3$	$\xi_4 \gamma_4$	$\xi_5 \gamma_5$	$\xi_6 \gamma_6$	
1	0,60951						0,60951
2	0,10700	0,48466					0,59166
3	0,03633	0,16457	0,38650				0,58740
4	0,01650	0,07474	0,17552	0,31898			0,58574
5	0,00885	0,04010	0,09417	0,17115	0,27064		0,58491
6	0,00529	0,02396	0,05626	0,10223	0,16167	0,23505	0,58446

Ce tableau démontre que la variation de K_u est très petite (dernière colonne à droite) et que, par conséquent, la subdivision de la conduite en un nombre n plus ou moins grand de tronçons est sans grande influence sur la fonction bénéfices.

Théoriquement, la solution la plus convenable s'obtiendrait avec $n = \infty$. Dans ce cas, purement théorique, K_u assume sa valeur *minimum minimorum* :

$$\begin{aligned} (K_u)_{n=\infty} &= F \lim_{n=\infty} \sum_{r=1}^n \xi_r \gamma_r = F \int_0^L \frac{dx}{L} \left(\frac{h}{H} \right)^{\frac{5}{7}} = \\ &= F \int_0^L \frac{dx}{L} \left(\frac{x}{L} \right)^{\frac{5}{7}} = F L^{-\frac{12}{7}} \int_0^L x^{\frac{5}{7}} dx = \frac{7}{12} F \end{aligned}$$

La valeur de K_u décroît donc

$$\text{de } \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{5}{7}} F = 0,60951 F$$

$$\text{à } \frac{7}{12} F = 0,58333 F$$

alors que n varie de 1 à ∞ .

§ 4. — Détermination du nombre n .

Nous avons déjà remarqué que la solution du problème avec $n = \infty$ est à écarter en raison de l'impossibilité de son application pratique.

Il reste donc à déterminer la question du choix le plus convenable pour le nombre n .

Nous observerons à ce sujet que la subdivision définie au paragraphe précédent de la conduite en un nombre plus ou moins grand de tronçons entraîne à des frais supplémentaires pour les organes de raccord entre deux diamètres différents. Suivant les principes du constructeur, un pareil changement de diamètre peut même motiver l'érection d'un massif d'ancrage, surtout dans les cas où ce point de la conduite coïncide avec un changement de direction dans le plan vertical ou horizontal. Nous n'avons guère tenu compte jusqu'ici de ces frais supplémentaires occasionnés par les changements de diamètre.

Pour introduire ce nouveau facteur dans nos calculs, nous observons qu'à la dépense afférente à la conduite et déjà indiquée précédemment :

$$fP = fwt \int_0^L D^2 h dl = f \frac{\lambda}{2k\varphi} \pi z p \int_0^L D^2 h dl$$

il est nécessaire d'ajouter la dépense provenant de la subdivision en n tronçons et que l'on peut représenter par :

$$g(n-1)$$

où nous indiquons par g la dépense afférente à un changement de diamètre, avec sa part des frais du massif d'ancrage, le cas échéant.

Nous n'avons donc plus à rendre minimum la fonction K_u mais :

$$\begin{aligned} K'_u &= K_u + \frac{2k\varphi}{\lambda \pi z p} \frac{g}{f} (n-1) \\ &= F \sum_{r=1}^n \xi_r \gamma_r + \frac{2k\varphi}{\lambda \pi z p} \frac{g}{f} (n-1) \\ &= F \left\{ \sum_{r=1}^n \xi_r \gamma_r + \frac{N}{F} (n-1) \right\} \end{aligned}$$

où nous rappelons que F a la valeur :

$$F = \frac{7}{5} T^{\frac{2}{7}} L H^{\frac{5}{7}}$$

alors que nous avons indiqué par N :

$$N = \frac{2 k \varphi}{\lambda \pi z p} \frac{g}{f}$$

La valeur de n à adopter est donc celle qui rend minimum

$$\sum_{r=1}^{r=n} \xi_r \eta_r^{\frac{5}{7}} + \frac{N}{F} (n-1)$$

Il est à observer que le premier terme

$$\sum_{r=1}^{r=n} \xi_r \eta_r^{\frac{5}{7}}$$

est une fonction de n non explicitement exprimée par rapport à n . Mais nous connaissons les valeurs de cette fonction :

0,60951
0,59166
0,58740
0,58574
0,58491
0,58446

relatives à $n = 1 \div 6$ (tableau III) et rien ne s'opposerait de calculer des autres valeurs de cette fonction pour des nombres entiers de n supérieurs à 6.

Pour déterminer la valeur de n il suffira donc de calculer la valeur de la constante $\frac{N}{F}$.

Au plus petit des nombres :

0,60951 pour $n = 1$
0,59166 + $\frac{N}{F}$.. » $n = 2$
0,58740 + 2 $\frac{N}{F}$.. » $n = 3$
0,58574 + 3 $\frac{N}{F}$.. » $n = 4$
0,58491 + 4 $\frac{N}{F}$.. » $n = 5$
0,58446 + 5 $\frac{N}{F}$.. » $n = 6$

correspondra la valeur la plus convenable de n .

§ 5. — Exemple pratique.

Une application numérique mettra en évidence ce que nous avons exposé dans les paragraphes 3 et 4.

Admettons une conduite caractérisée par

$T = 500$ (1)
 $L = 500$ m
 $H = 353,55$ m ($\alpha = 45^\circ$).

Nous calculons donc :

$$F = \frac{7}{5} T^{\frac{2}{7}} L H^{\frac{5}{7}} = 273248$$

(1) Le calcul de T sera exposé dans un appendice.

En admettant, ensuite :

$z = 1,20$
 $k = 12000$ t/m²
 $\varphi = 0,90$
 $\pi = 3,14$
 $p = 7,8$ t/m³
 $\lambda = 1,1$
 $\frac{g}{f} = 0,69$

nous aurons :

$$N = 458$$

et

$$\frac{N}{F} = \frac{458}{273248} = 0,00168$$

Il s'ensuit :

0,60951 = 0,60951 pour $n = 1$
0,59166 + 0,00168 = 0,59334 » $n = 2$
0,58740 + 2. 0,00168 = 0,59076 » $n = 3$
0,58574 + 3. 0,00168 = 0,59078 » $n = 4$
0,58491 + 4. 0,00168 = 0,59163 » $n = 5$
0,58446 + 5. 0,00168 = 0,59286 » $n = 6$

et la valeur la plus convenable est donc $n = 3$.

Les longueurs des trois tronçons s'obtiennent alors en multipliant les coefficients ξ_1 , ξ_2 et ξ_3 relatifs à $n = 3$ par $L = 500$ m, ce qui conduit à :

$l_1 = 96,51$ m
 $l_2 = 169,77$ m
 $l_3 = 233,72$ m.

Les charges statiques aux centres de gravité de ces trois tronçons s'obtiennent en multipliant les coefficients η_1 , η_2 , et η_3 relatifs à $n = 3$ par $H = 353,55$ m, ce qui nous conduit à :

$y_1 = 34,12$ m
 $y_2 = 128,265$ m
 $y_3 = 270,92$ m.

Les diamètres des trois tronçons seront donc :

$D_1 = \sqrt{\frac{7T}{y_1}} = 1,4675$ m, pratiquement 1,45 m
 $D_2 = \sqrt{\frac{7T}{y_2}} = 1,2145$ m, » 1,20 m
 $D_3 = \sqrt{\frac{7T}{y_3}} = 1,0915$ m, » 1,10 m.

En ce qui concerne l'épaisseur de paroi e , celle-ci est définie par

$$e = \frac{\lambda}{2 k \varphi} h D = \frac{h D}{49636}$$

Par conséquent e devrait varier linéairement dans

le premier tronçon de 0 m à 0,005 m
le deuxième » 0,004 à 0,012
le troisième » 0,011 à 0,020.

Pratiquement, il n'y a pas moyen de construire des tuyaux d'épaisseur de paroi variable avec continuité. Chaque tronçon devra donc être subdivisé en segments d'épaisseur de paroi constante et correspondant à l'extrémité aval de chaque segment.

Une deuxième restriction est celle que l'épaisseur de paroi ne peut guère descendre au-dessous d'une limite constructive que nous avons fixée à

$$e_0 = 8 D = 0,005 D$$

dans notre étude de 1921.

Ces raisons d'ordre constructif exigent que l'épaisseur de paroi du premier tronçon devra être constante et non inférieure à 0,005. $1,45 = 0,00725$, soit pratiquement 0,008 m.

Dans le deuxième tronçon, l'épaisseur de paroi devra par contre varier de millimètre en millimètre de

$$0,005. 1,20 = 0,006 \text{ m à } 0,012 \text{ m,}$$

alors que dans le troisième tronçon, e devra varier de millimètre en millimètre de 0,011 m à 0,020 m.

Il nous reste à établir l'influence que peut avoir la substitution des diamètres courants aux diamètres théoriques, la substitution des épaisseurs de parois graduellement variables aux épaisseurs variables avec continuité et la condition suivant laquelle les épaisseurs de parois ne doivent pas être inférieures à une valeur limite $e_0 = \delta D = 0,005 D$.

Le tableau suivant renseigne sur ce sujet.

TABLEAU IV

	Valeurs de K_u pour :		
	D théorique e variable avec continuité	D courant e variable avec continuité	D courant e variable, graduellement, non inférieure à la limite 0,005 D
1 ^{er} tronçon....	9928	9934	24994
2 ^e tronçon.....	44968	45002	47485
3 ^e tronçon.....	105609	105641	108139
Valeurs de K_u Pour 2 ancrages	160506 916	160577 916	180618 916
Valeurs de K'_u	161422	161493	181534

L'on s'aperçoit par les dates de ce tableau que :

1° La substitution des diamètres courants aux diamètres théoriques n'a qu'une influence très petite ;

2° La substitution de e graduellement variable à l'épaisseur de paroi variable avec continuité (troisième tronçon et une partie du deuxième) n'a qu'une petite influence ;

3° La substitution de $e_0 = \delta D = 0,005 D$ à e variable avec continuité (premier tronçon et une partie du deuxième) a une notable influence.

Ce dernier résultat nous montre qu'il est indispensable d'introduire dans l'exposé mathématique du problème la condition suivant laquelle l'épaisseur de paroi ne peut guère descendre au-dessous de la valeur limite de $e_0 = \delta D = 0,005 D$.

C'est pourquoi nous nous occuperons dans le chapitre suivant de la résolution du problème des conduites pourvues d'une section amont.

(A suivre.)

Comme suite à la première partie de l'Etude de M. SANTO-RINI, nous avons reçu la lettre suivante :

Monsieur le Secrétaire général de la Rédaction
de la Houille Blanche,

14, rue Bellecordière,

Lyon.

Dans le mémoire de M. Santo-Rini, publié dans le dernier numéro de la Houille Blanche (janvier-février 1925), sur les « Dimensions économiques d'une conduite forcée », j'ai rencontré la même exposition et le même résultat d'une étude que je fis dans l'année 1919 et qui a paru dans la grande Revue italienne La Elettrotecnica, N° 36, décembre 1919.

Pour démontrer ce que j'affirme, je vous envoie un « extrait » de cette étude.

En conséquence, je vous prie de publier la présente lettre dans votre Revue.

Recevez mes meilleures salutations.

Ing. Ferdinand PAGLIARO.



Voici la réponse que nous adresse M. SANTO-RINI :

Le problème des dimensions optimum d'une conduite forcée en métal se subdivise en deux parties :

- 1° Détermination des diamètres, et
- 2° Subdivision de la conduite.

En ce qui est de la détermination des diamètres, ceux-ci s'expriment par notre formule générale (1) :

$$D_r = \sqrt[7]{\frac{T}{y_r}}$$

où T est une constante et y = la charge statique au centre de gravité du tronçon en question. Cette formule n'est donc nullement identique avec celle couramment employée depuis une vingtaine d'années où y était remplacé par h = charge statique à l'extrémité aval du tronçon, formule que M. Pagliaro mentionne dans son article du 25 décembre 1919 dans la revue Elettrotecnica, mais qui est due au professeur Zunini (1897), comme l'a fort justement fait remarquer le professeur Sartori dans sa mise au point immédiate de l'article de M. Pagliaro (voir Elettrotecnica du 5 février 1920, page 62).

En ce qui est de la subdivision de la conduite, cette loi, malgré toutes les recherches, n'a jusqu'ici jamais pu être établie, ce dont M. P. convient de bonne grâce dans son article de 1919. Elle a été énoncée pour la première fois dans le numéro Janvier-Février 1925 de cette Revue sous le N° 7 :

$$\frac{2}{5} y_{r+1}^{\frac{5}{7}} + y_{r+1}^{-\frac{2}{7}} h_r = \frac{2}{5} y_r^{\frac{5}{7}} + y_r^{-\frac{2}{7}} h_r$$

Dans ces conditions, l'étrange allégation de M. Pagliaro ne laisse que de surprendre.

SANTO RINI.

(1) Nos (16), (17) et (18) dans notre mémoire de 1921 et N° (5) dans l'étude en cours de publication dans cette Revue.

