

HYDRAULIQUE

La Solution générale du Problème de la Détermination des Dimensions Economiques Maximum d'une Conduite forcée en Métal et son Application aux Calculs pratiques.

Par PAUL P.-SANTO RINI, Ingénieur E. P. Z., Athènes.

Il est bien connu des ingénieurs hydrauliciens que la détermination des dimensions à donner aux éléments d'une conduite forcée en métal, problème fondamental de la technique des aménagements hydro-électriques, acquiert une importance capitale en raison de la dépense afférente aux conduites sous pression d'une haute chute : en effet, les cas ne sont pas rares où cette dépense se chiffre à une fraction importante du coût de l'aménagement complet.

Précisons, que par le mot *éléments* nous désignons les inconnues du problème constructif qui sont en l'occurrence les diamètres D et les longueurs l des tronçons successifs d'une conduite forcée de longueur totale connue L .

La détermination des $(2n - 1)$ inconnues

$$\begin{cases} D_1, D_2, \dots, D_n \\ l_1, l_2, \dots, l_{n-1} \end{cases} \quad (1),$$

une fois le nombre n de tronçons fixé ou déterminé a été souvent tentée mais jamais réalisée : comme conséquence, le problème de la détermination des dimensions économiques maximum d'une conduite fut considéré comme *mathématiquement insoluble*.

Afin d'obvier aux graves difficultés du problème mathématique, les divers auteurs ayant traité cette importante question ont toujours fait des hypothèses plus ou moins arbitraires.

Nous aussi, dans une étude parue en 1921 ⁽²⁾, nous avons adopté une condition pratique : celle d'imposer *a priori* des diamètres fixes correspondant à des tuyaux de fabrication courante.

Nous avons ainsi abouti à un nouveau procédé pour la détermination des points de séparation des tronçons successifs, l'emploi de nos tables ⁽³⁾ rendant, d'autre part, ces calculs simples et immédiats, facteurs justifiant la large adoption de notre méthode pour les applications pratiques ⁽⁴⁾.

(1) l_n n'est pas une inconnue, pouvant s'exprimer par

$$l_n = L - \sum_{r=1}^{n-1} l_r$$

(2) PAPADOPOULOS-SANTO RINI, ingénieur d'Etat à la Direction des Forces Hydrauliques, Athènes : « La Théorie du Rendement Economique Maximum d'une Conduite forcée en métal et le Calcul rationnel de ses Eléments ». (« La Houille Blanche », juillet-août 1921).

(3) P.-SANTO RINI : « Le Calcul rationnel des Eléments d'une Conduite forcée en métal sur la base de son Rendement Economique Maximum ». (J. Rey, éditeur, Grenoble, 1921, p. 36 à 39).

(4) E. PACORET : « Les Forces hydrauliques et les Usines hydro-électriques » (Paris, 1923), pages 70 à 76 et 86 ;
« Génie Civil » (Paris, 1921), p. 298 ;
« La Houille Blanche » (Lyon, 1922), p. 227 ;
« Bulletin technique de la Suisse Romande » (Lausanne, 1923), p. 239 ;
« Bulletin d'Economie Hydrotechnique » (Prague, 1924), p. 13 ;
« Annali dei Lavori Pubblici » (Rome, 1924), p. 394 ; etc., etc.

Mais nous avons pensé que, du fait même de l'adoption des diamètres courants, la solution proposée ne peut être mathématiquement interprétée autrement que comme solution particulière du problème, la solution générale pouvant, d'autre part, fort bien conduire à une détermination encore plus rationnelle des éléments de la conduite.

C'est pourquoi, abandonnant dorénavant toute hypothèse arbitraire, nous exposerons dans ce mémoire aussi bien la solution générale du problème mathématique que son utilisation immédiate aux applications pratiques à l'aide d'un seul abaque graphique.

I. — CONDUITE CURVILIGNE

§ I. — Exposé de la fonction minimum.

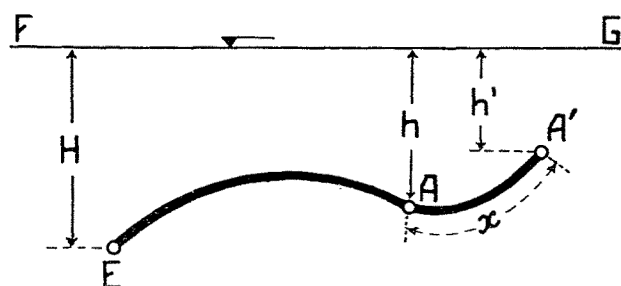


Fig. 1.

Soit A'E (Fig. 1) l'axe d'une conduite supposé curviligne dans son cas le plus général. Soient FG le niveau hydrostatique et h' et H les charges statiques à l'origine A' et à l'extrémité E de la conduite de longueur L ⁽¹⁾.

Supposons la courbe A'E définie par une relation entre la longueur x de l'arc A'A et la charge hydrostatique h correspondant à un point quelconque A.

En résolvant cette relation par rapport à h ,

$$h = h(x)$$

sera l'équation de la courbe A'E.

Nous avons déjà exposé dans notre monographie citée que la condition à satisfaire était celle de rendre maximum les bénéfices annuels B.

(1) $h' = 0$ si A' tombe sur le niveau hydrostatique F G.

Pour exprimer ces bénéfices nous représenterons par :

E l'énergie électrique annuelle en *kWh*,

A le coût du *kWh*,

P le poids de la conduite en *tonnes*,

f le prix d'une *tonne* de conduite toute posée,

C les frais annuels d'exploitation et d'entretien,

i le taux d'intérêt et d'amortissement, et

v le prix de vente du *kWh*.

Les frais annuels seront alors représentés par

$$V = C + (AE + fP) i,$$

alors que les revenus annuels s'exprimeront par

$$R = vE.$$

Les bénéfices annuels B seront donc :

$$B = R - V = E(v - Ai) - fPi - C \quad (1).$$

En désignant encore par *q*, *w*, *s* et *t* des constantes connues (1), ainsi que par :

Q le débit moyen annuel en *m³/sec*,

H la charge statique à l'extrémité aval de la conduite en *mètres*,

dx l'élément infinitésimal de l'axe de la conduite L,

$Y = q Q^2 \int_0^L \frac{dx}{D^5}$ la perte de charge totale à l'extrémité de la conduite,

e = *w Dh* l'épaisseur de paroi du tuyau de diamètre D,

il résulte :

$$E = s Q (H - Y) = s Q H - s q Q^3 \int_0^L \frac{dx}{D^5}$$

$$P = t \int_0^L e D dx = wt \int_0^L D^2 h dx$$

En substituant ces valeurs dans (1), on aura, enfin :

$$B = \text{constante} - \left\{ s q Q^3 (v - Ai) \int_0^L \frac{dx}{D^5} + wt f i \int_0^L D^2 h dx \right\}$$

Pour que B soit maximum, il suffit de rendre minimum l'expression entre parenthèses, ou ce qui revient au même :

$$K_u = \frac{2}{5} T \int_0^L \frac{dx}{D^5} + \int_0^L D^2 h dx, \quad (2)$$

(1)

$$q = \frac{64}{\pi^2} \frac{\mu}{c^2}$$

$$w = \frac{\lambda}{2 k \varphi}$$

$$s = \frac{0,736 \cdot 1000}{75} a b$$

$$t = \pi z p,$$

les notations étant les mêmes que dans notre mémoire cité, soient :

μ = coefficient exprimant le rapport de la perte de charge totale de la conduite supposée mise en service, à la perte de charge calculée simplement pour un tuyau d'axe rectiligne (p. ex. $\mu = 1,05$),

c = le coefficient de la formule de Chézy (p. ex. $c = 60$),

λ = coefficient permettant de tenir compte de la surcharge statique due au coup de bélier (p. ex. $\lambda = 1,15$),

k = travail admis du métal à la traction en *t/m²*,

φ = rendement de la soudure ou rivure (p. ex. $\varphi = 0,90$),

a = le nombre d'heures de fonctionnement par année,

b = rendement mécanique de l'installation (p. ex. $b = 0,80$),

z = coefficient exprimant le rapport du poids réel de la conduite toute posée, y compris les jonctions des tuyaux au poids calculé simplement d'après la formule approximative $e = w Dh$ (p. ex. $z = 1,20$).

en posant :

$$T = \frac{5 s q Q^3 (v - Ai)}{2 w t f i}, \quad (3)$$

valeur qui peut être considérée comme une constante de l'aménagement et identique à celle indiquée dans notre première étude.

§ 2. — Solution générale pour le cas d'une conduite à axe curviligne établie entièrement suivant la loi de la section aval.

S'il eut été possible de construire une conduite à diamètres variables avec continuité de point en point, la loi de la variation de D s'obtiendrait immédiatement par la condition

$$\frac{\partial K_u}{\partial D} = 0$$

fournissant l'expression

$$D = \sqrt[5]{\frac{T}{h}}$$

où D apparaît uniquement comme fonction de la charge statique *h*.

Dans l'impossibilité où l'on se trouve de construire une pareille conduite affectant la forme d'un entonnoir, il est nécessaire de la remplacer par une autre conduite constituée par *n* tronçons de diamètres constants D.

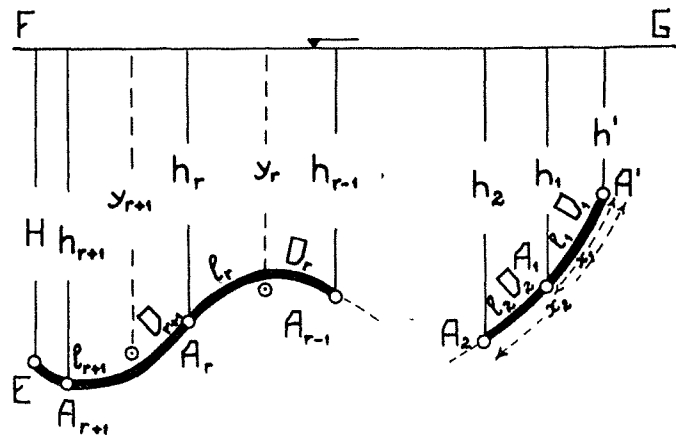


Fig. 2.

En désignant alors par A_r le point de division entre les r^{me} et $(r + 1)^{\text{me}}$ tronçons, par h_r la charge statique *y* relative, et par l_r et D_r les longueur et diamètre du r^{me} tronçon (Fig. 2), la fonction K_u tirée de (2) assume la forme :

$$K_u = \frac{2}{5} T \sum_{r=1}^{r=n} \frac{x_r - x_{r-1}}{D_r^5} + \sum_{r=1}^{r=n} D_r^2 \int_{x_{r-1}}^{x_r} h dx \quad (4)$$

qui contient les $(2n - 1)$ inconnues

$$\left\{ \begin{array}{l} D_1, D_2, \dots, D_n \\ x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \end{array} \right.$$

Entre ces inconnues subsistent les $(2n - 1)$ relations qui s'obtiennent en annulant les dérivées partielles de K par rapport aux D et aux *x*.

En dérivant (4) par rapport à D_r et en annulant cette dérivée, l'on obtient :

$$-5 \cdot \frac{2}{5} \cdot T (x_r - x_{r-1}) D_r^{-6} + 2 D_r \int_{x_{r-1}}^{x_r} h dx = 0$$

d'où :

$$D_i = \sqrt[7]{\frac{T(x_r - x_{r-1})}{x_r \int_{x_{r-1}}^{x_r} h dx}}$$

Si nous désignons maintenant par y_r la charge statique correspondant au centre de gravité du segment d'arc $(x_r - x_{r-1})$, il résulte :

$$y_r = \frac{\int_{x_{r-1}}^{x_r} h dx}{x_r - x_{r-1}},$$

donc :

$$D_r = \sqrt[7]{\frac{T}{y_r}} \quad (5)$$

L'expression (5) montre que les diamètres D peuvent être déterminés lorsqu'on connaît la subdivision de la conduite en n tronçons.

Pour établir cette subdivision et pour déterminer donc les $(n-1)$ inconnues x_1, x_2, \dots, x_{n-1} , l'on pourrait annuler les dérivées partielles de (4) par rapport à ces inconnues et substituer ensuite aux D leurs valeurs fournies par (5). Pourtant, afin de simplifier les calculs, nous préférons substituer directement dans (4) les valeurs fournies par (5) et déterminer ensuite les valeurs de x qui rendent minimum la nouvelle expression de K_u .

Cette substitution conduit à :

$$\begin{aligned} K_u &= \frac{2}{5} T \sum_{r=1}^{r=n} (x_r - x_{r-1}) \left(\frac{T}{y_r}\right)^{-\frac{5}{7}} + \sum_{r=1}^{r=n} \left(\frac{T}{y_r}\right)^{\frac{2}{7}} \int_{x_{r-1}}^{x_r} h dx \\ &= \frac{2}{5} T^{\frac{2}{7}} \sum_{r=1}^{r=n} (x_r - x_{r-1}) y_r^{\frac{5}{7}} + T^{\frac{2}{7}} \sum_{r=1}^{r=n} y_r^{-\frac{2}{7}} y_r (x_r - x_{r-1}) \\ &= \frac{7}{5} T^{\frac{2}{7}} \sum_{r=1}^{r=n} (x_r - x_{r-1}) y_r^{\frac{5}{7}}. \end{aligned}$$

$\frac{7}{5} T^{\frac{2}{7}}$ étant une constante, il s'ensuit que rendre minimum K_u équivaut à rendre minimum la somme :

$$\sum_{r=1}^{r=n} (x_r - x_{r-1}) y_r^{\frac{5}{7}}$$

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

THEOREME I

Pour la subdivision la plus économique en n tronçons de n'importe quelle conduite forcée en métal d'épaisseur de paroi proportionnelle à la charge statique et au diamètre en chaque point de la conduite, il est nécessaire et suffisant que la somme des moments du degré $\frac{5}{7}$ par rapport au niveau hydrostatique des longueurs des n tronçons supposées concentrées dans les centres de gravité de ces tronçons, soit un minimum.

L'équation simple :

$$\sum_{r=1}^{r=n} (x_r - x_{r-1}) y_r^{\frac{5}{7}} = \text{minimum} \quad (6)$$

représente la *condition essentielle* du problème examiné.

Nous montrerons maintenant comment la relation (6) fournit les $(n-1)$ équations susceptibles de déterminer les $(n-1)$ inconnues x_1, x_2, \dots, x_{n-1} .

A cet effet, et en annulant la dérivée partielle de (6) par rapport à x , on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{5}{7} (x_{r+1} - x_r) y_{r-1}^{-\frac{2}{7}} \frac{d y_{r+1}}{d x_r} - y_{r+1}^{\frac{5}{7}} + \frac{5}{7} (x_r - x_{r-1}) y_r^{-\frac{2}{7}} \frac{d y_r}{d x_r} \\ \dots - y_r^{\frac{5}{7}} = 0. \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} \frac{d y_{r+1}}{d x_r} &= \frac{x_{r+1} - x_r}{d x_r} = \frac{(x_{r+1} - x_r) \frac{d}{d x_r} \int_{x_r}^{x_{r+1}} h dx + \int_{x_r}^{x_{r+1}} h dx}{(x_{r+1} - x_r)^2} \\ &= \frac{-(x_{r+1} - x_r) h_r + (x_{r-1} - x_r) y_{r+1}}{(x_{r+1} - x_r)^2} = \frac{y_{r+1} - h_r}{x_{r+1} - x_r} \end{aligned}$$

et, d'une manière analogue :

$$\frac{d y_r}{d x_r} = \frac{h_r - y_r}{x_r - x_{r-1}}$$

En substituant, l'on obtient enfin :

$$-y_{r+1}^{\frac{5}{7}} + \frac{5}{7} y_{r+1}^{-\frac{2}{7}} (y_{r+1} - h_r) + y_r^{\frac{5}{7}} + \frac{5}{7} y_r^{-\frac{2}{7}} (h_r - y_r) = 0$$

d'où :

$$\frac{2}{5} y_{r+1}^{\frac{5}{7}} + y_{r+1}^{-\frac{2}{7}} h_r = \frac{2}{5} y_r^{\frac{5}{7}} + y_r^{-\frac{2}{7}} h_r \quad (7)$$

qui est l'équation fondamentale à l'aide de laquelle se déterminent les longueurs des tronçons.

y_{r-1} étant fonction de x_{r+1} et x_r , y_r fonction de x_r et x_{r-1} , et h_r fonction de x_r , l'équation (7) ne contient que les seules trois inconnues successives x_{r+1} , x_r et x_{r-1} ; r pouvant assumer les valeurs de 1 à $(n-1)$, le nombre des équations (7) sera également $(n-1)$. La première de ces équations ne contiendra que les deux inconnues x_1 et x_2 , et, d'une manière analogue, la dernière équation contiendra seulement les deux inconnues x_{n-2} et x_{n-1} .

La résolution du système des $(n-1)$ équations (7) entre les $(n-1)$ inconnues x_1, x_2, \dots, x_{n-1} devient donc évidente : la première équation fournira x_2 en fonction de x_1 , la deuxième x_3 en fonction de x_2 et x_1 , donc, implicitement, de x_1 , et ainsi de suite jusqu'à l'avant-dernière équation qui fournira x_{n-1} en fonction de x_1 . En substituant les valeurs obtenues de x_{n-1} et x_{n-2} dans la dernière équation, celle-ci ne contiendra plus que la seule variable x_1 qui sera ainsi déterminée.

Les longueurs des tronçons de la conduite étant déterminées à l'aide des équations (7), les diamètres s'obtiennent immédiatement par les équations (5).

En ce qui concerne la valeur la plus rationnelle pour le nombre de tronçons n , l'on obtient facilement cette détermination en faisant intervenir dans les calculs le coût d'un changement de diamètre. Un des paragraphes suivants sera consacré au calcul de n .

§ 3. — Solution générale pour le cas d'une conduite à axo curviligne composée d'une section aval et d'une section amont.

Dans la résolution du problème étudié au paragraphe précédent, nous avons admis que l'épaisseur de paroi varie suivant la loi

$$e = w Dh$$

où w représente une constante.

Pratiquement, l'épaisseur de paroi ne peut descendre au-dessous d'une certaine valeur limite e_0 que nous avons définie, à la page 19 de notre monographie citée, par

$$e_0 = \varepsilon D$$

où ε représente une constante voisine de 0,005.

En désignant par h_0 la charge statique correspondant au point A_0 de la conduite (Fig. 3) où l'épaisseur de paroi a la valeur limite e_0 , on a :

$$w Dh = \varepsilon D$$

d'où :

$$h_0 = \frac{\varepsilon}{w}.$$

donc :

$$h_0 = \text{constante constructive de la conduite.}$$

Le point A_0 vient ainsi diviser la conduite en deux sections, celle *aval* A_0E où l'épaisseur de paroi varie avec continuité suivant la loi $e = wDh$ et celle *amont* A_0A' où l'épaisseur de paroi est constante et égale à $e_0 = \varepsilon D$.

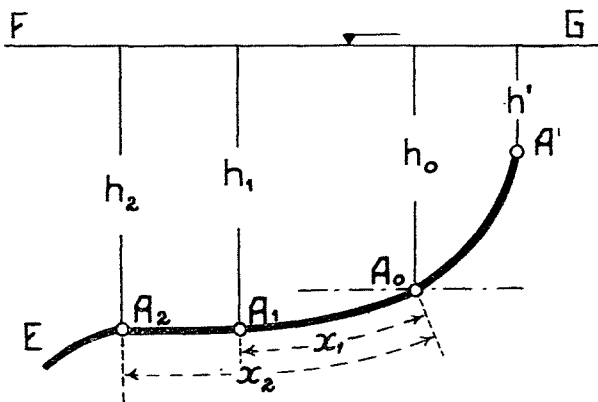


Fig. 3.

Ceci établi, passons à la résolution mathématique du problème relatif au calcul des éléments d'une conduite forcée ainsi définie, c'est-à-dire composée d'une section aval et d'une section amont.

Désignons à cet effet par L_u la longueur de la section aval, par l_0 celle de la section amont, par D_0 le diamètre en cette section, et choisissons le point A_0 comme origine des coordonnées x .

En répétant le calcul des bénéfices annuels B , ceux-ci s'expriment ici par :

$$B = \text{constante} - \left\{ sq Q^3 (v - \Delta i) \left[\int_0^{L_u} \frac{dx}{D^5} + \frac{l_0}{D_0^5} \right] \right. \\ \left. \dots + w t f i \int_0^{L_u} D^2 h dx + k t f i D_0^2 l_0 \left\{ \right. \right.$$

Comme dans le cas du paragraphe 1, l'expression entre parenthèses doit être minimum afin que B devienne maximum, donc :

$$K = \frac{2T}{5} \int_0^{L_u} \frac{dx}{D^5} + \int_0^{l_0} D^2 h dx + \frac{2T}{5} \frac{l_0}{D_0^5} + h_0 l_0 D_0^2 \quad (8)$$

où la constante T a toujours la même valeur (3).

En confrontant l'expression (8) de K pour une conduite constituée par deux sections : amont et aval, avec l'expression (2) établie pour le cas d'une conduite dépourvue de section amont, l'on peut écrire :

$$K = K_u + K_m$$

où par K_m nous désignons la somme :

$$K_m = \frac{2T}{5} \frac{l_0}{D_0^5} + h_0 l_0 D_0^2$$

En dérivant maintenant K par rapport à D_0 et en annulant cette dérivée, l'on a :

$$\frac{dK}{dD_0} = \frac{dK_m}{dD_0} = -5 \cdot \frac{2}{5} \cdot T l_0 D_0^{-6} + 2 h_0 l_0 D_0 = 0$$

d'où :

$$D_0 = \sqrt[7]{\frac{T}{h}} \quad (9)$$

qui fournit la valeur constante du diamètre D_0 pour la section amont.

Observant ensuite que K_m est indépendant des variables x et D qui n'apparaissent qu'en K_u , il résulte évidemment que :

$$\frac{dK}{dD} = \frac{dK_u}{dD}$$

$$\frac{dK}{dx} = \frac{dK_u}{dx}$$

D'où la conclusion :

La solution indiquée au paragraphe 2 pour une conduite dépourvue de section amont est aussi valable pour la subdivision de la section aval d'une conduite pourvue de section amont.

En particulier, le théorème I énoncé au paragraphe 2 se modifie en :

THEOREME II

Le point de subdivision d'une conduite forcée en métal en une section amont et en une section aval est caractérisé par une charge statique dont la valeur constante est indépendante de l'aménagement en étude. La section amont se compose d'un seul tronçon. Pour la subdivision la plus économique en n tronçons de la section aval, il est nécessaire et suffisant que la somme des moments du degré $\frac{5}{7}$ par rapport au niveau hydrostatique des longueurs des n tronçons supposées concentrées dans les centres de gravité de ces tronçons, soit un minimum.

Pour la section aval supposée divisée en n tronçons, la condition

$$\sum_{r=1}^{r=n} (x_r - x_{r-1}) y_r^{\frac{5}{7}} = \text{minimum}$$

doit être vérifiée, condition qui fournit le système de relations dérivées, servant au calcul des longueurs des tronçons :

$$(7) : \quad \frac{2}{5} y_{r+1}^{\frac{5}{7}} + y_{r+1}^{-\frac{2}{7}} h_r = \frac{2}{5} y_r^{\frac{5}{7}} + y_r^{-\frac{2}{7}} h_r$$

Pour la section *aval*, les diamètres se déterminent par l'expression :

$$(5) : \quad D_r = \sqrt[7]{\frac{T}{y_r}}$$

Par contre, pour la section *amont*, celle-ci n'est constituée que d'un seul tronçon dont le diamètre est fourni par :

$$(9) : \quad D_o = \sqrt[7]{\frac{T}{h_o}}$$

où nous rappelons que h_o est la charge statique du point de séparation entre les sections aval et amont, valeur pratiquement voisine de 100 mètres.

Il est à observer que la *longueur* et la *configuration* de la section amont n'ont aucune influence sur les résultats que nous venons d'indiquer.

L'axe de la conduite étant connu, on commence par tracer la parallèle $A_o S$ (Fig. 4) située à h_o en dessous du niveau hydrostatique FG.

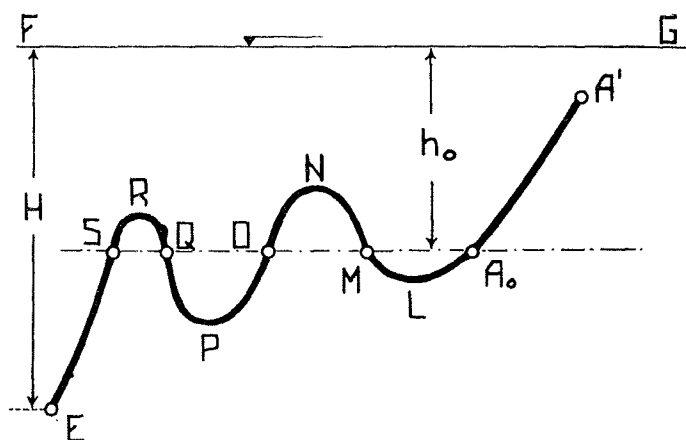


Fig. 4.

En ce qui concerne les segments de conduite *au-dessus* de $A_o S$ la relation :

$$o = \frac{dK}{dD_o} = \frac{dK_m}{dD_o} = \frac{d}{dD_o} \left(\frac{2}{5} \frac{T}{D_o^{5/2}} + h_o l_o \frac{D_o^2}{D_o^5} \right)$$

fournit la valeur

$$D_o = \sqrt[7]{\frac{T}{h_o}}$$

D'une manière analogue :

$$o = \frac{dK}{dD_o} = \frac{dK_m}{dD_o}$$

fournit la valeur

$$D_o = \sqrt[7]{\frac{T}{h_o}},$$

et ainsi de suite.

Par conséquent :

Toutes les portions de conduite situées au-dessus de $A_o S$ ont toujours le même diamètre constant

$$D_o = \sqrt[7]{\frac{T}{h_o}}$$

En ce qui est des segments de conduite situés *au-dessous* de $A_o S$, l'on peut remarquer que les termes K_u sont indépendants entre eux ; il résultera donc

$$K_m = \text{minimum}$$

si l'on aura simultanément :

$$K_u = \text{minimum}$$

$$K_u'' = \text{minimum}$$

$$\dots\dots\dots$$

etc.

Il s'ensuit que :

La subdivision des portions de conduite situées au-dessous de $A_o S$ devra s'effectuer l'une indépendamment de l'autre.

Pour chacune de ces portions subsiste la relation fondamentale :

$$(7) : \quad \frac{2}{5} y_r^{5/2} + y_{r+1}^{-2/7} h_r = \frac{2}{5} y_r^{5/2} + y_r^{-2/7} h_r$$

qui permet la subdivision de la conduite en un nombre n de tronçons, la valeur de n se déterminant en faisant intervenir la dépense afférente à un changement de diamètre.

Pour chacun de ces tronçons le diamètre se détermine toujours par la même formule

$$(5) : \quad D_r = \sqrt[7]{\frac{T}{y_r}}$$

Le problème mathématique de la détermination des éléments d'une conduite forcée curviligne se trouve donc complètement résolu.

En ce qui est des *applications pratiques*, la résolution mathématique des relations (7) présuppose évidemment la connaissance de l'équation algébrique de la courbe formée par l'axe de la conduite. Or, cet axe étant supposé suivre les sinuosités du terrain, l'équation qui en résulte peut affecter une forme des plus compliquées, rendant de ce fait même la résolution des équations (7) très laborieuse, sinon impossible. Deux procédés peuvent donc être envisagés pour tourner cette difficulté :

1° En utilisant la propriété *géométrique* exposée dans le théorème II énoncé au paragraphe 3, l'on peut parvenir après quelques essais à une bonne subdivision de la conduite,

2° En décomposant le tracé curviligne en un *tracé polygonal* dont nous montrerons la détermination *automatique*. Cette solution que nous recommandons pour les applications pratiques permet la résolution immédiate du problème. Il nous a été, en effet, possible d'étendre aux conduites polygonales un procédé graphique de calcul dérivant de l'application des formules de ce chapitre au cas des tronçons rectilignes composant un tracé polygonal.

(A suivre.)

Sur une formule de perte de charge d'application universelle

Par M. A. HAEGELEN, *Ingénieur des Ponts et Chaussées.*

La question suivante se pose souvent pour les ingénieurs hydrauliciens, qu'il s'agisse du calcul d'une conduite forcée, d'un canal d'amenée, ou encore d'un calcul d'évacuation des crues :

Quelle formule de perte de charge dois-je appliquer?

Nombreuses — et parfois assez discordantes — sont, en effet, les formules indiquées par les expérimentateurs et les auteurs qui se sont spécialisés dans l'étude de l'hydraulique appliquée. On trouverait facilement, dans les traités d'hydraulique 80 formules, ou davantage, reposant sur un nombre plus ou moins grand d'expériences, entre lesquelles le choix est parfois malaisé, d'autant que la plupart des expériences exécutées l'ont été à l'échelle du laboratoire, et que force est souvent de se livrer à des extrapolations hasardeuses avant de les appliquer.

Aussi doit-on être reconnaissant à tous ceux qui essaient, en reprenant les matériaux déjà réunis, et au besoin en en apportant de nouveaux, de présenter en quelque sorte la synthèse des résultats acquis, et de fournir des éléments d'information précis.

Les formules de perte de charge actuellement les plus usitées sont les suivantes, qui découlent toutes de la formule de Chézy :

$$u = c \sqrt{R j}.$$

A. Canaux découverts et rivières.

Formule française de Bazin :

$$u = \frac{87}{1 + \frac{\gamma}{\sqrt{R}}} \sqrt{R j}$$

Formule suisse de Ganguillet et Kutter :

$$u = \frac{23 + \frac{1}{n} + \frac{0,00155}{j}}{1 + \left(23 + \frac{1}{n} + \frac{0,00155}{j}\right) \frac{n}{\sqrt{R}}} \times \sqrt{R j}$$

Formule simplifiée de Kutter.

$$u = \frac{100 \sqrt{R}}{m + \sqrt{R}} \times \sqrt{R j}$$

Dans ces formules, où on prend comme unités le mètre et la seconde, j désigne la perte de charge, u la vitesse moyenne, R le rayon hydraulique moyen ; les coefficients γ , n , m varient avec la rugosité des parois mouillées.

B. Conduites forcées.

Pour les tuyaux métalliques et les conduites forcées, on utilise habituellement des formules spéciales, dont la plus connue est celle de Maurice Lévy :

$$u = A \sqrt{\frac{D}{2} j \left(1 + 3 \sqrt{\frac{D}{2}}\right)}$$

dans laquelle D représente le diamètre, et le coefficient A ayant pour valeur 36,4 s'il s'agit de tuyaux neufs, et 20,5, s'il s'agit de tuyaux en fonte chargés de dépôts. Pour les conduites en béton armé, on prend généralement A égal à 25 ou à 28.

M. l'Ingénieur Strickler propose de revenir à l'ancienne formule de Gauckler :

$$u = k R^{\frac{2}{3}} j^{\frac{1}{2}}$$

le coefficient k caractérisant la nature des parois (1).

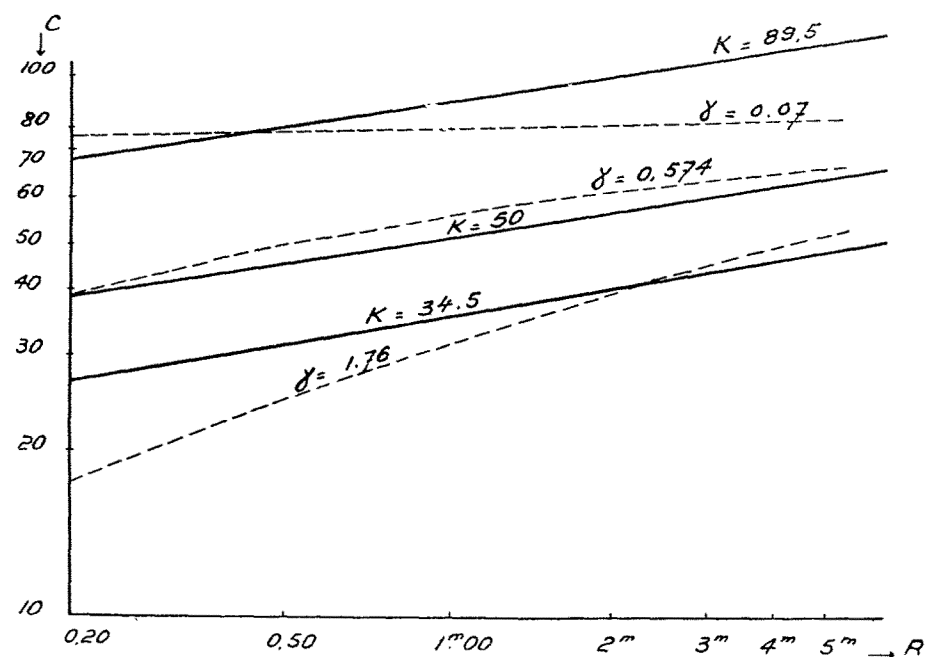


Fig. 1. — Variations du coefficient c de Chézy. Formule proposée : $c = K R^{1/6}$.

Formule de Bazin $c = \frac{87}{1 + \frac{\gamma}{\sqrt{R}}}$ (Diagramme logarithmique. En abscisse : le rayon moyen ; en ordonnée : le coefficient c).

Nous nous proposons, dans cette courte note, de faire connaître à nos collègues français, ingénieurs et hydrauliciens, une récente et remarquable étude de cette nature, due à M. Strickler, ingénieur au Service des Eaux Suisse, et publiée par ce Service (1). Nous aurons en même temps l'occasion de prendre connaissance de quelques résultats intéressants signalés par cet auteur.

(1) Beiträge zur Frage der Geschwindigkeitsformeln und der Rauigkeitszahlen für Ströme, Kanäle und Geschlossene Leitungen. — Berne 1923.

(1) Le coefficient k aurait lui-même pour expression, d'après l'auteur $k = \frac{21,1}{\sqrt[6]{\epsilon}}$ en désignant par ϵ la saillie moyenne des inégalités de la surface des parois (ou la dimension, dans le sens normal à l'écoulement, des graviers constituant le lit d'un cours d'eau).

Le coefficient c de Chézy aurait donc pour expression :

$$c = k R^{\frac{1}{6}}$$

La formule proposée, remarquablement simple — surtout si on la compare à la grande formule de Ganguillet et Kutter — s'appliquerait à tous les cas rencontrés en hydraulique pratique, qu'il s'agisse de rivières naturelles, de canaux à écoulement libre, ou de conduites forcées. Ainsi que les autres formules, elle indiquerait que le coefficient de Chézy croît avec le rayon moyen (Voir figure 1). Toutefois, alors que, d'après les autres formules le coefficient de Chézy tend vers une limite fixe, indépendante de la rugosité, lorsque le rayon moyen augmente, de sorte que, pour un rayon assez grand, le débit deviendrait indépendant de la rugosité, il n'en est pas ainsi avec la formule proposée ; les débits, pour des sections géométriquement identiques et pour une même pente, resteraient dans les mêmes rapports que les coefficients de rugosité, et le coefficient de Chézy croît constamment avec le rayon.

Nous allons maintenant examiner sur quelles vérifications expérimentales est étayée la formule que nous examinons.

L'auteur a dépouillé les résultats de très nombreuses mesures de débit exécutées sur le Rhin, par la méthode du moulinet ou des flotteurs de surface. Nous citerons tout d'abord 17 mesures exécutées sur le Rhin à Bâle, dans lesquelles la pente superfici-

rières, de la parfaite concordance des résultats obtenus aux diverses stations du Rhin, et même de la grande analogie de l'ensemble de ces résultats avec ceux trouvés sur d'autres fleuves ou rivières.

Nous croyons utile de grouper ci-après, de façon résumée, quelques-uns de ces résultats :

RIVIÈRES	Nombre de mesures	Débits constatés en mc./sec.		Valeurs de k	
		minimum	maximum	minimum	maximum
Le Rhin à Rothenbrunnen.....	8	13	352	22,6	31,8
Le Rhin à Felsberg....	7	24,3	389,7	26,5	33,7
— à Mastrils ...	7	28	1.095	26,8	37,8
— à St-Margre-ten.....	9	47	648	35,2	38,4
Le Rhin à Nol.....	8	113	987	37,6	41,8
— à Kaiserstahl.	8	161	1.014	35	43,5
— à Waldshut..	12	283,6	2.342	31,2	42,7
— à Bâle.....	17	325	5.500	28,1	34,8
Le Rhône à Porte-du-cex.....	8	35	789	38,6	43
Le Mississipi à Vicksburg.....	5	"	"	32,5	39,4
Le Danube à Vienne ...	16	977	7.000	33,6	43,7
La Saône à Raconnay ...	6	" = 0,565	" = 0,725	34,5	36,6

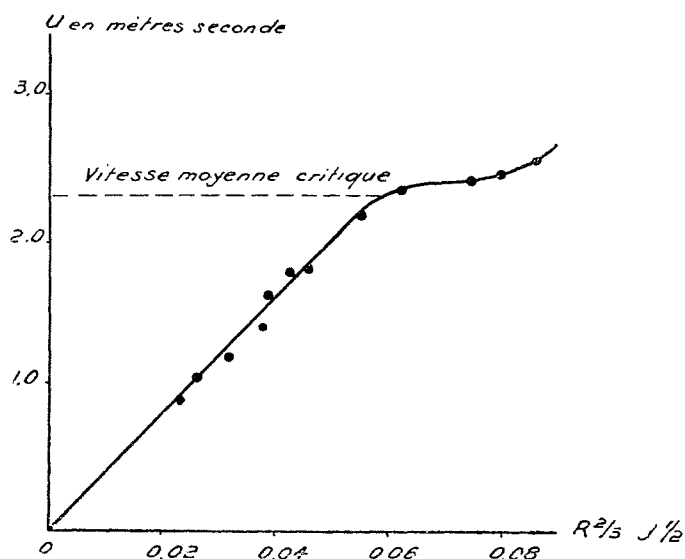


Fig. 2.— Le Rhin à Waldshut. ● Point donné par une mesure de débit (en abscisse, la quantité $R^{2/3} j^{1/2}$, en ordonnée la vitesse moyenne u).

cielle a varié de 0,00029 à 0,0011 et le rayon mouillé de 2 m. 16 à 7 m. 14 avec des variations corrélatives du débit comprises entre 325 et 5500 mc/sec. On a obtenu, pour le coefficient k , des valeurs variant de 28,1 à 34,8, et se groupant généralement entre 32 et 34,8. Pour faire rentrer les mêmes résultats dans le cadre de la formule de Bazin, il eût fallu faire varier le coefficient s entre les valeurs 0,017 et 0,031, ce coefficient croissant avec la vitesse moyenne dans le profil considéré.

On est d'ailleurs frappé, en faisant la part des multiples causes d'erreur inhérentes à toutes les opérations de jaugeage des

Il faut d'ailleurs remarquer que les valeurs de k baissent pour la plupart des stations, assez régulièrement à partir d'une vitesse moyenne critique, qui, d'après l'auteur, est celle pour laquelle les matériaux constituant le fond commencent à être soulevés et cessent d'être posés à plat, ce qui a pour effet d'en augmenter la rugosité (1).

Si nous traçons la courbe des u en fonction de la quantité $R^{2/3} j^{1/2}$, on obtient une courbe analogue à celle ci-contre (fig. 2). La vitesse critique, pour le Rhin à Bâle et à Waldshut, est voisine de 2 m. 50 par sec.

Tous les résultats que nous venons de citer sont relatifs à des rivières à faible pente (variant de $\frac{2}{100.000}$ à $\frac{1}{1.000}$). D'autres résultats, en assez petit nombre, sont donnés sur la Lutschine, la Drance de Bagne, pour des pentes allant jusqu'à $\frac{56}{10.000}$; ils paraissent également satisfaisants. On peut regretter néanmoins que ces résultats ne soient pas plus nombreux, et ne concernent pas des torrents à plus forte pente. Nous savons, il est vrai, combien il est difficile de faire des mesures de pente et de section dans des lits souvent encombrés de rochers, créant des tourbillons et des remous, dont il est difficile de dégager l'influence.

Les expérimentations faites au moulinet sur les galeries d'amenée en souterrain, qui sont mentionnées dans le travail que nous analysons sont intéressantes, en raison de la pénurie

(1) La dimension ϵ qui entre dans la formule $k = \frac{1}{6\epsilon^{1/2}}$, se trouve majorée, donc le coefficient de Chézy diminue.

des résultats publiés sur cette question : nous croyons utile d'en donner ci-dessous un tableau résumé :

$$c_2 = R^{\frac{1}{6}} = \left(\frac{D}{4}\right)^{\frac{1}{6}} \times k$$

DESIGNATION DE LA GALERIE	NATURE DES PAROIS	PENTE	NOMBRE DE MESURES	SECTION		Vitesses moyennes		VALEURS DE k	
				Forme	Dimensions ($b \times h$) maxima	minima	maxima	minima	maxima
Sitterstollen.....	béton lissé	0,000555	4	fer à cheval	2 ^m × 1 ^m 85	0,88	1,50	86,2	88,5
Muhleberg.....	béton avec enduit lissé	0,000457	6	»	»	2,02	13,6	62,1	76,3
Navizance.....	Maçonnerie avec enduit	0,0034	1	fer à cheval	2 ^m × 2 ^m 25	3,65	»	87	»
Simmezuleitung.	béton avec enduit	0,00046	1	fer à cheval	2 ^m 10 × 2 ^m 75	1,31	»	85,5	»
Kallnach.....	béton avec enduit	0,00065	1	fer à cheval	5 ^m × 6 ^m	2,72	»	87	»
Martigny-Bourg.	sans revêtement	0,0025	1	»	»	2,01	»	52	»
Ackersand.....	radier bétonné seul	0,0025	1	»	»	1,33	»	49,2	»
Gampel II.....	parois brutes	0,0030	1	»	»	1,11	»	40,8	»
Biaschina.....	galerie avec simple enduit	0,0015	1	»	»	2,30	»	64,1	»

On constate, sur les deux premières galeries, une constance assez satisfaisante du coefficient k . Ici encore, on eût aimé que les essais fussent plus nombreux, particulièrement sur les galeries laissées sans revêtement.

Les résultats obtenus par Bazin sur les canaux artificiels, qui constituent encore l'expérimentation la plus précise faite sur les pertes de charge, n'ont pas été laissés de côté ; les expériences constituant les séries 24, 25, 39, 7, 8 et 26 présentent une concordance très satisfaisante avec la formule de Strickler. Cela ressort du tableau ci-après :

Posons : $\sqrt[7]{2} A = B$, et $k = 2^{\frac{7}{6}} B$

Nous aurons : $k = 2^{\frac{5}{3}} A$, soit $k = 3,17 A$

et : $c_1 = B \sqrt{1 + 3 \sqrt{\frac{D}{2}}}$

$$c_2 = 2 \left(\frac{D}{2}\right)^{\frac{1}{6}} B$$

SERIE D'ESSAIS	NOMBRE DE MESURES	PENTE	Vitesses moyen.		VALEURS de k	OBSERVATIONS
			minima	maxima		
Série 24 (profil demi-circulaire revêtu en ciment pur).....	12	0,00142	0,909	1,841	97 à 106,5	
Série 25 (même profil revêtu en mortier de ciment et sable fin).....	12	0,00138	0,875	1,651	99 à 99,7	
Série 39 (rigole de Chazilly à section rectangulaire de 1 ^m 20 de largeur, maçonnerie de pierre de taille très régulière).....	4	0,0081	1,71	2,68	78 à 81,9	
Série 7 (canal en planches à section rectangulaire de 1 ^m 09 de largeur).....	12	0,00489	0,824	2,202	84 à 86	1 résultat aberrant $k = 65$
Série 8 (même canal).....	12	0,00816	0,938	2,707	86 à 89,3	1 résultat aberrant $k = 91,5$
Série 26 (canal en planches, profil 1/2 circulaire)...	13	0,00152	0,787	1,672	81 à 86,5	

Sur les conduites circulaires, l'auteur a également fait l'analyse d'un grand nombre de résultats, notamment de ceux obtenus par les expérimentateurs Fitzgerald, Iben, Marx-Wing-Hoskins, ainsi que dans le laboratoire de Zurich. Les résultats cités paraissent vérifier de façon très satisfaisante la formule proposée, qu'il s'agisse de conduites en fonte neufs ou incrustés, ou de tuyaux en bois raboté.

Il faut d'ailleurs remarquer que le coefficient de Chézy a sensiblement la même valeur si on emploie la formule de Maurice Lévy, ou si on utilise celle qui nous est proposée, à condition de prendre convenablement A et k . Ce coefficient a en effet pour expression avec la première formule :

$$c_1 = \sqrt[7]{2} \times \sqrt{1 + 3 \sqrt{\frac{D}{2}}} \times A$$

et avec la seconde,

Or, si nous calculons $\frac{c_1}{B}$ et $\frac{c_2}{B}$ pour diverses valeurs du diamètre, nous obtenons le tableau suivant :

Diamètre	$\frac{c_1}{B}$	$\frac{c_2}{B}$
0 m. 20	1,395	1,36
0 m. 40	1,53	1,53
1 m. 00	1,77	1,78
2 m. 00	2	2
4 m. 00	2,29	2,24
6 m. 00	2,49	2,40
8 m. 00	2,65	2,50

A la suite de ces diverses vérifications, l'auteur propose pour les valeurs du coefficient k le tableau suivant :

Nature des parois	Valeurs de k
Rochers très volumineux.....	15 à 20
Rochers moyens.....	20 à 28
Rochers de la grosseur de la tête.....	25 à 30
Gravier grossier (environ $50 \times 100 \times 150$ mm.).....	35
Gravier moyen (environ $20 \times 40 \times 60$ mm.)...	40
Gravier fin (environ $10 \times 20 \times 40$ mm.).....	45
Gravier fin avec beaucoup de sable. Maçonnerie grossière	50
Bonne maçonnerie de moellons béton bien exécuté sans enduit.....	60
Pierre de taille.....	80
Tuyaux de fonte neufs. Béton lissé. Planches de bois	90
Tuyaux modérément incrustés	70
Bois bien raboté. Enduits lissés au ciment	100

Le rapide exposé qui précède ne saurait prétendre à remplacer la lecture de l'ouvrage original de M. l'Ingénieur Strickler, qui est assez concis pour être difficile à résumer. Il traite également d'autres sujets, dont l'intérêt n'est pas moindre pour l'hydraulicien, et que nous nous contenterons d'indiquer brièvement :

Détermination d'une formule de perte de charge entièrement générale, s'appliquant à tous les fluides, s'écoulant sous le régime turbulent ou sous le régime laminaire.

Distribution des vitesses dans une même section pour différents profils.

Vérification du calcul de la couche de remous du barrage de Rheinfelden sur le Rhin.

Sur le point plus spécial que nous venons d'examiner, nos conclusions seront les suivantes :

1^o D'ores et déjà les vérifications expérimentales données par M. Strickler sont assez complètes pour que la formule qu'il propose de remettre en honneur soit retenue. Elle a d'ailleurs le mérite de la simplicité, et est d'une application facile ;

2^o Parmi les vérifications données, un grand nombre concernent des fleuves et rivières à faible pente. Il serait toutefois très intéressant de disposer d'un plus grand nombre de vérifications relatives aux rivières ou torrents à forte pente, et aux galeries d'amenée, puisque la formule proposée prétend être universellement applicable. On peut, à notre avis, le désirer d'autant plus que les multiples réalisations hydroélectriques exécutées en Europe offrent un riche champ d'études à des investigations de cette nature. C'est aujourd'hui dans le domaine de la réalité industrielle que doivent, à notre avis, être principalement entreprises les recherches hydrauliques.

Au point de vue du développement de la science française, il serait fort désirable qu'un service officiel ou quasi-officiel s'occupât de centraliser les résultats déjà obtenus dans les installations françaises. Nous verrions même fort bien l'Etat imposer à ses concessionnaires, dans le cahier des charges de la concession, l'obligation de faire exécuter, par un bureau d'essais agréé par lui, l'essai complet de ses installations, comportant notamment la détermination *précise* des pertes de charge dans les divers organes d'amenée de l'eau. Nous croyons les industriels suffisamment avertis de l'intérêt de la question pour accepter cette obligation. D'ailleurs, il faut progresser pour vivre.